COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Sujet commun aux ENS de CACHAN, LYON et PARIS)

Dans tout le problème, L est un réel strictement positif fixé et I désigne l'intervalle fermé [0, L]. On notera $C^0(I)$ l'espace des fonctions définies et continues sur I, à valeurs réelles. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $C^k(I)$ l'espace des fonctions définies sur I et admettant une dérivée k-ème continue sur I (chaque dérivée j-ème en 0 pour $1 \leq j \leq k$ étant en fait une dérivée à droite, et chaque dérivée j-ème en L étant une dérivée à gauche). Enfin, on désigne par a et b deux fonctions appartenant à $C^1(I)$.

Première partie

Dans cette partie, on considère le problème :

$$\begin{cases} y'' = a\,y' + b\,y + g \\ y(0) = \alpha,\ y(L) = \beta \end{cases}$$

où $g \in C^0(I)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$; on le transforme en un problème équivalent, et on montre que sous certaines conditions, il admet une solution unique.

1. Soient $g \in C^0(I)$ et $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$. Justifier brièvement l'existence et l'unicité dans $C^2(I)$ de la solution y au problème (1) suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} y'' = a(x)\,y' + b(x)\,y + g(x) \\ y(0) = \alpha_0,\ y'(0) = \alpha_1 . \end{cases}$$

2. On suppose que le problème $\begin{cases} y'' = a(x)\,y' + b(x)\,y \\ y(0) = 0,\ y(L) = 0 \end{cases}$ admet la seule solution $y \equiv 0$.

On note S l'espace vectoriel des solutions $y \in C^2(I)$ de l'équation $y'' = a(x)\,y' + b(x)\,y$.

a) Quel est le rang de l'application de S dans $\mathbb{R}^2$ définie par $y \mapsto (y(0), y(L))$?

b) Soient $g \in C^0(I)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que le problème :

$$(2) \qquad \begin{cases} y'' = a(x)\,y' + b(x)\,y + g(x) \\ y(0) = \alpha,\ y(L) = \beta \end{cases} \qquad \text{admet une solution unique } y \in C^2(I).$$

3. Soit $g \in C^0(I)$. Montrer que l'équation :

$$y'' = a(x)\, y' + b(x)\, y + g(x)$$

équivaut à une équation de la forme :

$$(3) \qquad -(p(x)\, y')' + q(x)\, y = h(x)$$

où p, q et h sont des fonctions que l'on déterminera. On choisira p de façon que $p(0) = 1$.

4. Montrer que si $b(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors pour tout $g \in C^0(I)$ et tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique fonction $y \in C^2(I)$ satisfaisant le problème (2).

(On pourra considérer l'équation (3) avec $h \equiv 0$ et les conditions aux bords $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, multiplier l'équation différentielle par y et intégrer sur [0, L].)

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie le problème aux valeurs propres pour l'application définie par :
$y \mapsto (-py')' + qy$, et on le ramène à un problème aux limites (5) pour une équation différentielle du premier ordre.

Soit $p \in C^2(I)$ une fonction minorée sur I par une constante p_0 strictement positive :

$$\exists\, p_0 > 0 : \forall\, x \in I\,,\ p(x) \geq p_0.$$

Soit $q \in C^1(I)$. On cherche les nombres réels λ pour lesquels le problème :

$$(4) \qquad \begin{cases} -(p(x)\, y')' + q(x)\, y = \lambda y \\ y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \end{cases}$$

admet des solutions $y \in C^2(I)$ **non triviales,** autrement dit non identiquement nulles. On note :

$$\mathbf{E} = \{\, y \in C^2(I)\ ;\ y(0) = 0\,,\ y(L) = 0\,\}\ ;$$

$$\mathbf{L} : \mathbf{E} \to C^0(I)$$
$$y \mapsto (-py')' + qy\,.$$

Par convention, un réel λ pour lequel le problème (4) admet une solution non triviale y_λ est appelé une **valeur propre** de L, et y_λ une **fonction propre** associée à cette valeur propre.

1. Dans cette question seulement, on considère le cas particulier où $p \equiv 1$ et $q \equiv 0$. Le problème (4) s'écrit alors :

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres et les fonctions propres de l'endomorphisme **L** correspondant.

Désormais, on considère le cas général décrit au début de la deuxième partie.

2. En utilisant les résultats de la première partie :

2.a. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de **E** constitué des solutions de (4) lorsque λ est une valeur propre de **L** ;

2.b. Montrer qu'il existe un réel μ_0 tel que pour tout $\lambda \leq \mu_0$, le problème (4) n'admet que la solution triviale.

3.a. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in C^2(I)$. Montrer que y est une solution non triviale du problème (4) si et seulement si les conditions (i) et (ii) suivantes sont satisfaites :

(i) Il existe deux fonctions r(x) et $\theta(x)$ définies et de classe C^1 sur I telles que l'on ait :

$$\forall x \in I : \quad \begin{cases} r(x) > 0 \\ y(x) = r(x) \sin \theta(x) \\ p(x)\, y'(x) = r(x) \cos \theta(x) ; \end{cases}$$

(ii) Les fonctions r et θ vérifient :

$$(5) \qquad \begin{cases} \theta'(x) = \dfrac{\cos^2\theta(x)}{p(x)} - (q(x) - \lambda) \sin^2\theta(x) \\ \sin \theta(0) = 0, \quad \sin \theta(L) = 0 \end{cases}$$

$$(6) \qquad r'(x) = \left(\frac{1}{p(x)} + q(x) - \lambda\right) \sin \theta(x) \cos \theta(x)\, r(x).$$

Pour établir (i), on pourra considérer un intervalle maximal de la forme $[0, T[$ avec $T > 0$ sur lequel r et θ sont définies et de classe C^1, et raisonner par l'absurde en supposant $T < L$.

3. b. Montrer que λ est valeur propre de **L** si et seulement si le problème (5) admet au moins une solution $\theta \in C^1(I)$ telle que :

$$\theta(0) = 0, \ \theta(L) = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Troisième partie

Dans cette partie, on considère le problème défini par l'équation différentielle du problème (5) et la condition initiale $\theta(0) = 0$; on montre que ce problème admet une solution unique dans $C^1(I)$, et que cette solution est une fonction positive et croissante de λ.

Soit $p \in C^2(I)$ une fonction minorée sur I par une constante p_0 strictement positive :

$$\exists\, p_0 > 0 : \forall\, x \in I\,,\ p(x) \geq p_0.$$

Soit $q \in C^1(I)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit θ une solution maximale du problème :

$$(7) \qquad \begin{cases} \theta'(x) = \dfrac{\cos^2\theta(x)}{p(x)} - (q(x) - \lambda)\sin^2\theta(x) \\ \theta\,(0) = 0. \end{cases}$$

1. On suppose que θ est définie et de classe C^1 sur un intervalle maximal de la forme $[0, T[$ avec $T < L$.

1.a. Montrer que θ' est bornée sur $[0, T[$. En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^T \theta'(x)dx$.

1.b. Montrer que $\theta(x)$ admet une limite finie à gauche en T. En déduire une contradiction avec l'hypothèse $T < L$. Conclure que θ appartient à $C^1([0, L])$.

On note désormais $\theta(x, \lambda)$ la solution maximale du problème (7) définie sur $[0, L]$. Toutes les dérivées de cette fonction seront prises par rapport à x ; on note donc :

$$\theta'(x, \lambda) = \frac{\partial\theta}{\partial x}\,(x, \lambda).$$

2. On suppose qu'il existe $x_1 \in]0, L]$ tel que $\theta(x_1, \lambda) \leq 0$. Soit x_0 la borne inférieure des valeurs x_1 possédant cette propriété.

2.a. Montrer que x_0 est strictement positif.

2.b. Montrer que $\theta(x_0, \lambda) = 0$.

2.c. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\theta(x, \lambda)$ soit strictement croissante sur l'intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0[$. En déduire une contradiction avec la définition de x_0, puis que $\theta(L, \lambda) > 0$.

3. Soient λ et μ deux réels tels que $\lambda > \mu$. On suppose qu'il existe $x_1 \in]0, L]$ tel que $\theta(x_1, \lambda) \leq \theta(x_1, \mu)$. Soit x_0 la borne inférieure des valeurs x_1 possédant cette propriété.

3.a. Montrer que $x_0 > 0$ et que $\theta(x_0, \lambda) = \theta(x_0, \mu)$.

3.b. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall\, x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[: \theta'(x, \lambda) > \theta'(x, \mu)$.

3.c. En déduire une contradiction avec la définition de x_0, puis que la fonction $\lambda \mapsto \theta(L, \lambda)$ est strictement croissante.

4.a. Soit $z \in C^1(I)$ telle que $z(0) = 0$. On suppose qu'il existe A, B > 0 tels que :

(8) $\qquad \forall\, x \in I : z'(x) \leq A + B\, z(x).$

Montrer qu'alors :

$$\forall\, x \in I : z(x) \leq A \times e^{Bx}.$$

4.b. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > \mu$. On pose $z(x) = \theta(x, \lambda) - \theta(x, \mu)$. En établissant une inégalité du type (8), montrer que l'application $\lambda \mapsto \theta(L, \lambda)$ est continue.

Quatrième partie

Dans cette partie, on détermine les limites de $\theta(L, \lambda)$ pour λ tendant vers $\pm\infty$, et on en déduit l'existence d'une suite infinie croissante de valeurs propres pour l'opérateur L.

Soit $p \in C^2(I)$ une fonction minorée sur I par une constante p_0 strictement positive :

$$\exists\, p_0 > 0 : \forall\, x \in I,\quad p(x) \geq p_0 .$$

Soit $q \in C^1(I)$; on note : $Q = \sup \{ |q(x)| ; x \in I \}$; $P = \sup \{ p(x) ; x \in I \}$.

1. Soit $\gamma \in]0, \pi/2[$.

1.a. Montrer qu'il existe $\mu_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda < \mu_1,\quad \forall\, x \in [0, L] : \frac{\cos^2 \gamma}{p(x)} - (q(x) - \lambda) \sin^2 \gamma < 0.$$

1.b. En utilisant un raisonnement analogue à celui de 3.b de la troisième partie, montrer que :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda < \mu_1,\ \forall\, x \in [0, L] : \theta(x, \lambda) \leq \gamma.$$

En déduire que $\theta(L, \lambda)$ tend vers 0 quand λ tend vers $-\infty$.

2. On note $N(\lambda)$ la partie entière de $\dfrac{\theta(L, \lambda)}{\pi}$.

2.a. Montrer qu'il existe $\mu_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > \mu_2,\quad \forall x \in I : \theta'(x, \lambda) > 0.$$

2.b. Soit K un segment de $[0, \theta(L, \lambda)]$. Montrer que si $\lambda > \mu_2$, l'image réciproque J de K par l'application $x \mapsto \theta(x, \lambda)$ est un segment de $[0, L]$.

2.c. En considérant successivement les images réciproques par l'application $x \mapsto \theta(x, \lambda)$ des segments de la forme :

$$[k\pi - \varepsilon, k\pi + \varepsilon] \text{ et } [k\pi + \varepsilon, (k+1)\pi - \varepsilon],\ k \in \mathbb{N},\ \text{de } [0, \theta(L, \lambda)],$$

montrer que pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit et $\mu_3 > 0$ assez grand :

$$\forall \lambda > \mu_3,\ \forall \varepsilon \in\ ]0, \varepsilon_0[:\ L \leq 4\,(N(\lambda)+1)\,P\varepsilon + \frac{(N(\lambda)+1)\,(\pi - 2\varepsilon)}{(\lambda - Q)\,\sin^2 \varepsilon}.$$

2.d. En déduire que $\theta(L, \lambda)$ tend vers $+\infty$ quand λ tend vers $+\infty$.

3.a. Montrer que l'application **L** définie dans la deuxième partie admet une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de valeurs propres réelles, croissante et non bornée.

3.b. Montrer que l'on a :

$$\forall\ y, z \in \mathbf{E} :\ \int_0^L \mathbf{L}y(x)\ z(x)\ dx\ =\ \int_0^L y(x)\ \mathbf{L}z(x)\ dx\ .$$

En déduire que si y_n et y_p sont deux fonctions propres associées à deux valeurs propres λ_n et λ_p distinctes, alors on a :

$$\int_0^L y_n(x)\ y_p(x)\ dx\ = 0.$$

4. En s'inspirant de l'exemple du II-1, proposer une méthode de résolution du problème :

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)\,y = g(x) \\ y(0) = 0,\ y(L) = 0 \end{cases}$$

utilisant les fonctions propres y_n, $n \in \mathbb{N}^*$, pour l'opérateur **L**.

Quelles sont selon vous les hypothèses à formuler et les assertions à démontrer pour que votre méthode soit applicable ?